528. 正則ナ g 曲線系ニ就イテ(II)

寺阪英孝(阪大)

§2.

定義　球面ノ各点ハ，ソレヲ含ンデ正則領域ガ選ベルカラ，球面Sノ緊迫性(*Kompaktheit*)ニヨリ，半径Rノ近傍$U(x,R)$ハxノ如何ニ拘ハラズ常ニ或ル正則領域ニ含マレルトイフ性質ヲモツタ$R>0$ガ存在スル。Rヲ正則常数ト名ヅケル。

定理5　正則領域内ニ任意ニg三角形(三ツノg線分デ作ラレタ三角形)ヲツクレバ，コレ又正則領域ニナル。

コレハ明ラカデアル。今g線分ヲ適当ニ有限個引イテS面ヲ有限個ノ三角形ニ三角分割(*Triangulieren*)シ，且ツソノ直径ヲ凡ベテRヨリ小ナラシメレバ，各三角形ハ正則領域ニナルカラ：

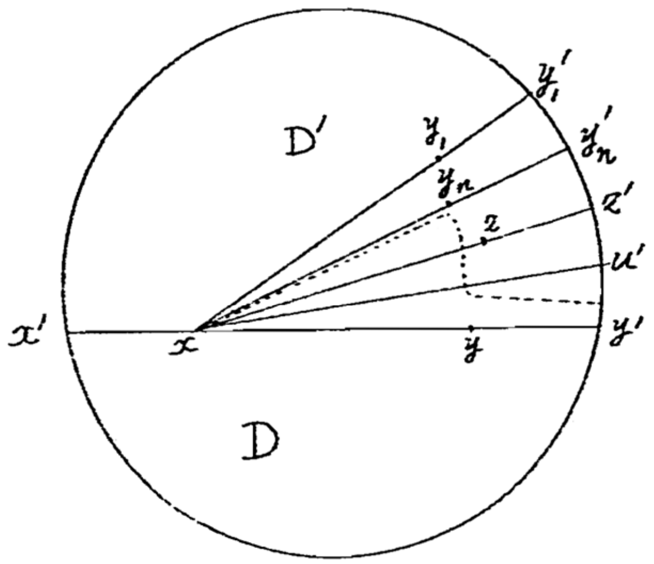
定理6　Sハ有限個ノ正則領域ニヨリ三角分割出来ル。

次ニ g系ノ曲線群ノ収斂性ニツイテ考ヘヨウ。先ヅ

定理7　正則領域D内ノ異ナル二点x, y，及ビ$y_n \to y$ ($y_n \in D$, $n=1,2,\text{------}$)ナル点列ニツキ一様ナ $g(\overline{xy_n}) \to g(\overline{xy})$ ガ成立スル。

(証)　$g(\overline{xy})$ヲ双方ニ延長シテ $\dot{D}$トx', y'デ交ハラセルト Dハ $g(\overline{x'y'})$ニヨリ二分サレル。y_nガコノ全ク一方ニ含マレル場合ダケ考ヘレバヨイカラ，ソノヨウニ仮定

スル。$g(\overline{xy_n})$ ヲ延長シテ $\dot{D}$ ト y_n' デ交ハラセルト，十分大ナル n ニツイテハ $g(\overline{xy_n})$ ハ $g(\overline{xy'})$, $g(\overline{xy_1'})$ ト $\dot{D}$ ノ一部トデカコマレタ開領域 D' ニ入ル。ヨツテ $g(\overline{xy_n})$ ノ集積点ハ D' ニ属スル訳デアルガ $g(\overline{xy'})$ 上ニナイ集積点 z ヲ有スルトスレバ，$g(\overline{xz})$ ハ $g(\overline{xy'})$ ト x ノミヲ共有スルカラ之レヲ延長シテ $\dot{D}$ ト z' デ交ハラセルト $z' \neq y'$. ヨツテ $\dot{D}$ 上デ z', y' ノ中間ニ



u' ナル点ヲトレバ $g(\overline{xu'})$ ハ $g(\overline{xz'})$ ト $g(\overline{xy'})$ トヲ互ニ分ツ。

然ルニ z ハ $g(\overline{xy_n})$ ノ集積点ダカラ無数ノ n ニツイテ z' ノ十分近クヲ $g(\overline{xy_n})$ ガ通ルガ，コレハ又同時ニ y ノ十分近クノ点 y_n ヲ通ル筈故途中デ $g(\overline{xu'})$ ヲ横ギルコトトナリ、コレハ正則領域ノ性質（一意可結性）ニ反スル。

即チ $\lim g(\overline{xy_n}) \subset g(\overline{xy'})$

次ニ $g(\overline{xy_n})$ ガ $g(\overline{yy'})$ ノ y 以外ノ点 z ヲ集積点ニモツトスレバ，無数ノ n ニツキ $g(\overline{xy_n})$ ハ y ノ近傍ノ二点 y_n, y_n' ト z ノ近傍ノ点トヲ通ル故コレ又 II ニ反スル。ヨツテ $g(\overline{xy_n}) \to g(\overline{xy})$.

$\boxed{\text{定理8. 局所一様収斂性}}$ x, y ガ正則領域 D ノ異ナ

ル二点デ $x_n \to x,\ y_n \to y\ (x_n, y_n \in D, n=1,2,\cdots\cdots)$ ナラバ一様ニ

$$g(\overline{x_n y_n}) \to g(\overline{xy})$$

前ノ定理カラ容易ニ証明出来ル。(前定理ヲ経ズニ証明スル法如何)本定理カラ

$\boxed{\text{定理 9. 広所一様収斂性}}$ $g(\overline{xy})$ ハ與ヘラレタ g 線分デソノ上ニ正則常数 R ヨリ小サイ直径ヲモツ g 線分 $g(\overline{xz})$ アツテ $x_n \to x,\ z_n \to z$ トスレバ, $g(\overline{x_n z_n})$ (正則領域内デ x_n, z_n ヲ結ブ g 線分)ノ延長上ニ点 y_n ガ存在シテ一様ニ $g(\overline{x_n y_n}) \to g(\overline{xy})$ トナル。

コレニハ $g(\overline{xy})$ ヲ $g(\overline{xy}) = \sum_{i=1}^{m} g(\overline{x_{i-1} x_i})\ (x_0 = x,\ x_1 = z,\ x_m = y)$ ニ分ケ $\delta(g(\overline{x_{i-1} x_i})) < R$ トスレバヨロシイ。

§3. 次ニ重要ナ g 曲線ノ性質ハ g 曲線ガ余リ彎曲シテヰナイコトデアル。一ツノ単一弧ノ極ク近クヲ往復スルコトハナイ,ト云フコトデアル。(測地線ニツイテ考ヘラレタシ)コノ性質ノ現ハレトシテ次ノ定理ガ考ヘラレル。

$\boxed{\text{定理 10. 有界彎曲性}}$ 凡テノ自然数 n ニツキ j_n ハ g 線分, j_n' ハ S 上ノ単一弧デ $j_n + j_n' = \dot{D}_n$ ハ単一閉曲線ヲナシ,且ツソレデ囲マレタ面分 D_n ハ互ニ素デアルトスル。コノトキ j_n' ガ一点 x_0 ニ収斂スルナラバ j_n モ亦同ジ点 x_0 ニ収斂スル。

(証) コノ証明ハ少々長スギルヤウデアルガ,次ノ様ニ出来ル。ココデハ面分ノ脈トイフモノヲ考ヘルカラ本紙112

号「面分ノ脈ニ就イテ」ヲ参照サレタシ。面分ガ単一閉曲線デ囲マレテヰルトキハ下ノ3）ノ如キ脈ノ性質ガ出ルガ，コノ証明ハ略ス。サテ

1) S上ノ点a，集合Mニツキ$r(a, M)$ナルモノヲ

$$r(a, M) = \underset{x \in M}{\rho(a, x)} \text{ ノ上限}$$

デ定義スル、特ニMガ単一弧abナルトキ，簡単ノタメ

$$r(ab) = r(a, ab)$$

トカク。

2) 単一閉曲線$\dot{D}$デ囲マレタ面分Dノ脈ヲMトスレバ，Mノ端以外ノ点xニヨリMハ二ツ以上ノ夫々連結集合ニ分タレル。

ソノ中M上ノ一定点Oヲ含マヌ勝手ナ一ツヲM_xデ表ハシ，xカラ出ルMノ分岐トイフ。

3) $x, x_1, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots \subset M$，$\overline{\overline{xx_n}}$ハ$M$上デ$x$，$x_n$ヲ結ブ単一弧デアツテ

$$\overline{\overline{xx_1}} \subset \overline{\overline{xx_2}} \subset \cdots\cdots \subset \overline{\overline{xx_n}} \subset \cdots\cdots$$

ナラバ $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{\overline{xx_n}}$ ハ単一弧デアル。（$\dot{D}$ガJordan曲線デナケレバ必ズシモ単一弧デハナイ）。特ニ

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\overline{xx_n}} \subset \overline{\overline{xz}}, \quad z \in M$$

ナルzガ存在セヌトキ

$$\lim \overline{\overline{xx_n}} = \overline{\overline{xy}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{xx_n}} = xy$$

トオキ，xy ヲ x カラ出ル子脈ト云フ。タゞシ $\overline{xy}$ ノ一端 y ハ一般ニ M ニハ属セズ、從ッテ一般ニ xy ハ $xy=\overline{xy}-(y)$ デアル。

4) d が與ヘラレタ正数デ，$\frac{d}{3}<r(0,M_0)$ ナルトキハ［0 ハ 2) ニ於ケル定点］

$$\frac{d}{4}\leqq r(x,M_x)\leqq\frac{d}{3}$$

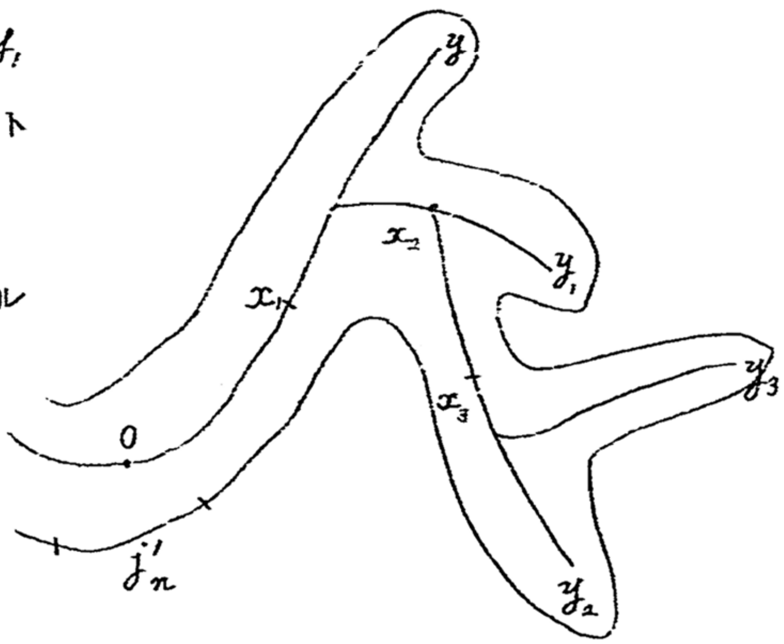
ナル如キ点 x が M 上ニ存在スルコトが次ノヤウニ証明出來ル。

i) $\frac{d}{3}<r(0,M_0)$ ナル故，$0y\subset M_0$，$\frac{d}{3}<r(0y)$ ナル如キ子脈 $0y$ が存在スル。スルト $0y$ 上ニ一点 x_1：$r(x_1y)=\frac{d}{4}$ が存在スル。若シ $r(x_1,M_{x_1})\leqq\frac{d}{3}$ ナラバ x_1 が求メルモノデアル。

ii) $\frac{d}{3}<r(x_1,M_{x_1})$ ナラバ

$$x_1y_1\subset M_{x_1},\ \frac{d}{3}<r(x_1y_1)$$

ナル如キ子脈 x_1y_1 が存在スル、スルト $x_2\in x_1y_1$，$r(x_2y_1)=\frac{d}{4}$ ナル x_2 が存在スル。若シ $r(x_2,M_{x_2})\leqq\frac{d}{3}$ ナラバ x_2 が求ムルモノデアル。



iii) 同様ニ進ンデユケバ有限回デ x ガ求マルノデアル。何者、モシ然ラズシテ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ ナル無限列ガアッタトスレバ一般ニ

$$\frac{d}{3} < r(x_n y_n),\quad x_{n+1} \in x_n y_n,$$

$$\frac{d}{4} = r(x_{n+1} y_n)$$

ナル故　α) $\frac{d}{3} < r(\overline{\overline{x_n x_{n+1}}})$ カ然ラザレバ　β) $\frac{d}{3} < \rho(x_n, z)$

$z \in x_{n+1} y_n$ ナル如キ z ガ存在スル。β) ナラバ

$\rho(x_{n+1}, z) \leqq \frac{d}{4}$ ナル故

$$\rho(x_n x_{n+1}) \geqq \rho(x_n, z) - \rho(x_{n+1}, z) > \frac{d}{3} - \frac{d}{4} = \frac{d}{12}$$

α), β) イヅレニシテモ $r(\overline{\overline{x_n x_{n+1}}}) > \frac{d}{12}$ トナル。

所ガ，$\overline{\overline{0x_n}} = \overline{\overline{0x_1}} + \overline{\overline{x_1 x_2}} + \cdots\cdots + \overline{\overline{x_{n-1} x_n}}$ ナル故 3) ニヨリ $\overline{\overline{0x_n}}$ ハ單一弧ニ收斂スル筈ダカラ $r(\overline{\overline{x_{n-1} x_n}}) > \frac{d}{12}$ ナルコトハアリ得ナイ。

5) 定理10ノ証明ヲトリカヽル。$f_n \to a$ デナイト假定シテ矛盾ヲ導ケバヨイ。$f_n \to a$ デナイトスレバ無数ノ n ニツキ $|f_n| > d > 0$ ナル如キ正数ガ存在スルガ d ハ正則密数 R ヨリ小トシテ差支ナイ。又番号ヲツケ代ヘレバ，スベテノ n ニツキ $|f_n| > d$ ト假定出來ル。

今 D_n ニ内接スル円ノ半径ノ最大値ヲ r_n トスレバ，S 上ノ無限個ノ面分 D_n ガ互ニ素デアリ從ッテ D_n ノ面積ハ $\frac{1}{n}$ ト共ニ $\to 0$ ナルコトカラ $r_n \to 0\ (n \to \infty)$ トナル。

r_n ノ性質カラ $x \in \dot{D}_n$ ナル点 x ト D_n ノ脈 M トノ距離ハ $< r_n$.

今 j'_n ト共通点ヲモツ D_n ノ重内接円ノ中心ヲ O トシ之レヲ定点トシテオクト，n が十分大デ $2r_n < \frac{d}{3}$ ナルトキハ少クモ一ツノ M_0 ニツキ $r(0, M_0) > \frac{d}{3}$ トナル。（∵ $\dot{D}_n$ ノ任意ノ二点ヲ y, z トシ，$\rho(y, y') < r_n$, $\rho(z, z') < r_n$, $y', z' \in M$ ナル y', z' ヲトレバ，若シ常ニ $r(0, M_0) \leq \frac{d}{3}$ ナラバ

$$\rho(0, y') \leq \frac{d}{3}, \quad \rho(0, z') \leq \frac{d}{3}$$

ナル故

$$\begin{aligned}\rho(yz) &\leq \rho(yy') + \rho(y', 0) + \rho(0, z') + \rho(z', z) \\ &\leq \frac{d}{3} + \frac{d}{3} + \frac{d}{3}\end{aligned}$$

トナリ、$|j_n| > d$ ニ反ス）

ヨツテ 4) ニヨリ M_0 上ニハ x ナル点がアツテ

$$\frac{d}{4} \leq r(x, M_x) \leq \frac{d}{3}$$

トナル。

今 x ヲ中心トシ D_n ニ重内接スル円 $\dot{K}_n$ ヲカケバ，M_x ナル脈ノ分岐ニ對スル $\dot{D}_n$ ノ部分弧 $\widehat{a_n b_n}$ ハ $\dot{K}_n$ ノ二点 a_n, b_n ヲ結ブ單一弧デ，且ツ $r(\widehat{a_n b_n})$ ハ M_x カラ容易ニワカル如ク

$$(*) \quad \frac{d}{4} - 2r_n \leq r(\widehat{a_n b_n}) \leq \frac{d}{3} + 2r_n$$

所デ $\rho(0, x)$ ハ 4), iii) ノ計算デ $> \frac{d}{12}$ ダッタカラ n ガ十分大デ従ッテ $|j'_n|$ 及ビ r_n ガ十分小ナラバ $j'_n \cdot K_n = 0$ 即チ j'_n ハ a_n ヲモ b_n ヲモ含マヌ、ヨッテ $j'_n \cdot \widehat{a_n b_n} = 0$ カ $j'_n \subset \widehat{a_n b_n}$ カデアルケレドモ j'_n ニ對スル脈ノ点 0 ハ M_x ニ含マレテイナイカラ $j'_n \subset \widehat{a_n b_n}$ ニハナラヌ。ヨッテ $\widehat{a_n b_n} \subset j_n$，即チ $\widehat{a_n b_n}$ ハ二点 a_n, b_n ヲ結ブ g 線分デアル。然ルニ n ガ十分大ナラバ $\rho(a_n b_n)$ ハ如何程ニモ小トナリ，従ッテ a_n, b_n ヲ結ブ g 線分ハ両点ヲ含ム正則領域内デハ十分小ナ g 線分ニヨッテノミ結バレルベキ筈ナルニ係ハラズ，(※) ニヨリ $\frac{d}{4} - 2r_n \leqq |\widehat{a_n b_n}|$ ナル g 線分 $\widehat{a_n b_n}$ ニヨッテモ結バレテキルカラ矛盾デアル。

コレデ $|j_n| \to 0$ 従ッテ $j_n \to x_0$ ガ証明サレタ。